בס"ד

קבוצות, יחסים, פונקציות

שבוע	נושא
.1	שיטות להגדרה של קבוצות, פרדוקס של ראסל, הכלה (inclusion), שוויון.
.2	בעית העצירה, פעולות על קבוצות, דיאגרמות ון, הוכחת תכונות של קבוצות, תרגילים.
.3	איחודים וחיתוכים כלליים, חוקי דה-מורגן כלליים, קבוצת החזקה, מכפלה קרטזית ותכונותיה.
.4	יחסים ופעולותיהם, היפוך (converse), הרכבה.
.5	היפוך, הרכבה, סגירה עוברת.
.6	סגירה עוברת, יחסי זהות.
.7	יחסי זהות.
.8	תרגילים.
.9	פונקציות, סוגי פונקציות, פעולות על פונקציות.
.10	דמויות, דמויות הפוכות, סדרים.
.11	סדרים.
.12	יחסים מבוססים היטב, אינדוקציה.
.13	יחסים מבוססים היטב, אינדוקציה, הוכחת תוכנית.
.14	חזרה.

תודות לאיתי שחק עבור עזרתו בתרגום דפים אלה מהאנגלית, ולאיתי שחק ושלמה הורביץ על ההקלדה.

שים לב: דפים אלה אינם מיועדים ללימוד עצמי של החומר.

ר .ב. יחזקאל
כסלו תשס״ב - דצמבר 2001 (תיקונים קלים: טבת תשע״ו - ינואר 2016)

קבוצות

קבוצה היא אוסף של איברים שונים. (סידור או שכפול של איברים איננו משמעותי).

{ יעקב, בנו הצעיר של יצחק } = { יעקב }
{ א, א, א } = { א } ; $\{0, 1\} = \{1, 0\}$

שיטות להגדרה של קבוצות

1. באופן ישיר ע"י רישום האיברים - $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. באופן עקיף ע"י תכונה - { x : x הוא סיפרה עשרונית }
3. בעזרת שימוש בהגדרה אינדוקטיבית:
   א) רישום ישיר של מספר איברים בקבוצה.
   ב) נתינת חוקים ליצירת איברים חדשים בקבוצה מתוך האיברים הידועים בקבוצה.

דוגמא 1

א) $1 \in S$, $3 \in S$
ב) אם $x \in S$, אזי $x+7 \in S$.

$S = \{ 1, 3, 8, 10, 15, 17, ... \}$

S = { x : x הוא מספר חיובי המשאיר שארית 1 או 3 בהתחלקו ב-7 }

דוגמא 2 - הגדרת מבנה של משפט מותנה

א. "משפט פשוט" $\in A$
ב. (i) אם $x \in A$, אזי: "אם תנאי אזי x" $\in A$
   (ii) אם $x \in A$ וגם $y \in A$, אזי: "אם תנאי אזי x אחרת y" $\in A$

לפי הגדרה זו
A = {משפט פשוט,
אם תנאי אזי משפט פשוט,
אם תנאי אזי משפט פשוט אחרת משפט פשוט,
אם תנאי אזי אם תנאי אזי משפט פשוט, ...}

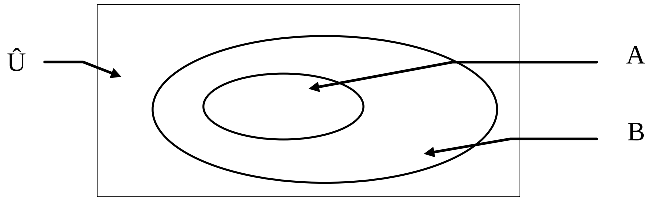
תרגיל: מדוע "אם תנאי אזי אם תנאי אזי משפט פשוט אחרת משפט פשוט" הינו איבר בקבוצה A ?

סימונים

צ.ש.	- צד שמאלי.
צ.י.	- צד ימני.
קבוצות	- אותיות לועזיות גדולות.
איברים	- אותיות קטנות.
$x \in S$	- x שייך לקבוצה S. x הינו איבר בקבוצה S.
$x \notin S$	- x אינו שייך לקבוצה S.
$\varnothing$, { }	- קבוצה ריקה.
$\hat{U}$	- קבוצה כוללנית (כמו type).
$\lvert S \rvert$	- מספר האיברים בקבוצה S.

$A \subseteq B$ - A מוכל בתוך B, כלומר לכל $x \in \hat{U}$, אם $x \in A$ אזי $x \in B$.

דיאגרמת ון המייצג $A \subseteq B$



$A=B$ - הקבוצות A, B הנן שוות, כלומר לכל $x \in \hat{U}$, $x \in A$ אם ורק אם $x \in B$.

פרדוקס של ראסל

למעשה, קבוצה כוללנית Û המכילה כל דבר באופן מוחלט מעלה סתירה, מכיוון שביכולתנו להגדיר:

$R = \{x \in \hat{U}: x \notin x\}$

אם Û כולל הכל, אז בוודאי $R \in \hat{U}$. כעת נשאל: האם $R \in R$?

מההגדרה של R נקבל: $R \in R$ אם ורק אם $R \in \hat{U}$ וגם $R \notin R$

אם ורק אם $R \notin R$ (מכיוון ש- $R \in \hat{U}$).

סתירה.

ישנן שתי דרכים לפתרון הסתירה:

1. ביכולתנו לומר כי R איננו איבר של Û. מבט זה מתייחס אל Û כאל סוג (type), ו-R פשוט איננו שייך לסוג האיברים של Û. (טיפוסים (types) בשפות התכנות יסודם בתיאוריית הטיפוסים שפותחה כדי לפתור את הפרדוקס).
2. ביכולתנו לומר שפשוט איננו יודעים לענות על השאלה האם $R \in R$, מכיוון שהיא מוליכה לדרך למידה אינסופית.

כדי לפתור $R \in R$
מחייב שנפתור $R \notin R$,
שמחייב שנפתור $R \in R$,
שמחייב שנפתור $R \notin R$
…

הגישה הראשונה הינה מתמטית, והשנייה הינה חישובית.

תרגילים

1. כמה איברים יש בקבוצה { א, ב, { א, ב }, ג }?
2. האם הקבוצה { ∅ } ריקה? האם הקבוצה {{ }} ריקה? האם {∅} = {{ }}?
3. האם {{ א, ב }, ג } ∈ { א, ב }? האם { א, ב } ⊆ {{ א, ב }} ?
4. האם { 1, 4, 9 } ⊇ { x: x הינו מספר שלם שהוא ריבוע מושלם } ?
5. הגדר את הקבוצה הבאה ע״י תכונה וע״י שימוש בהגדרה אינדוקטיבית: { 1, 2, 4, 8, 16, ... }
6. הגדר את הקבוצה הבאה ע״י שימוש בהגדרה אינדוקטיבית: { (0, 1), (3, 2), (6, 4), (9, 8), ... }

בעית העצירה

ארגומנט הדומה לזה ששימש לפרדוקס ראסל יכול לשמש להראות שאין אלגוריתם כללי לבחינה האם תוכנית, (פרוצדורה, פונקציה) עוצרת או לא. כלומר, אין אלגוריתם המגדיר פונקציה (h (P,x1 ,x2, ..., xn כך ש-

$h (P, x_1, x_2, ..., x_n) = true$ אם $P (x_1, x_2, ..., x_n)$ עוצרת,
$h (P, x_1, x_2, ..., x_n) = false$ אם $P (x_1, x_2, ..., x_n)$ איננה עוצרת.

למען הפשטות, נניח ש- n=1 ושכל הפרמטרים של h הם מחרוזות.

אם פונקציה כזאת היתה ניתנת להגדרה ע"י אלגוריתם, היינו יכולים להגדיר:

```
function g (P) return integer is
begin
        if h (P, P)            --    האם P (P) עוצרת ?
        then loop  end loop    --  לולאה אינסופית
        else return (0)
end g;
```

אם נשאל מה הערך של g (g) נקבל סתירה ש-g (g) עוצרת אם ורק אם היא איננה עוצרת. סתירה זו הינה תוצאה של ההנחה שהפונקציה h ניתנה להגדרה ע"י אלגוריתם. כך, לא ניתן להגדיר פונקציה h ע"י אלגוריתם.

קבוצת החזקה

אם S היא קבוצה כלשהי, אזי קבוצת החזקה של S היא: $P(S) = \{ A:\ A \subseteq S \}$.

לדוגמא: אם $S = \{1, 2, 3\}$, אזי:

$$P(S) = \{ \emptyset,\ \{1\}, \{2\}, \{3\},\ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},\ \{1,2,3\} \}$$

הגודל של קבוצת החזקה

אם לקבוצה S יש n איברים, אזי לקבוצה P (S) יש 2^n איברים.

זה יכול להכתב בקיצור כ:- $|P(S)| = 2^{|S|}$

הוכחה: ישנם n איברים ב-S. כל אחד מהאיברים יכול להיות בתוך או מחוץ לתת-קבוצה. כך, ישנן n ברירות עצמאיות בין שתי דרכים לשם יצירת תת קבוצה כלשהי (לשים או לא לשים). מכאן, שתת קבוצה יכולה להיווצר ב:- $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \ldots\ 2}_{\text{n פעמים}} = 2^n$ דרכים. כך ישנן 2^n תת-קבוצות, כלומר ל-P (S) יש 2^n איברים.

פונקציה אופיינית של תת-קבוצה (וקטור סיביות)

תהי S קבוצה, ותהי A תת-קבוצה כלשהי של S, $A \subseteq S$.

הפונקציה האופיינית של תת הקבוצה A ביחס ל-S, מוגדר לכל האיברים $a \in S$ ע"י:

$f(a) = 1$ אם $a \in A$

$f(a) = 0$ אם $a \notin A$

עבור הקבוצות הסופיות: $S = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$,

הפונקציה האופיינית יכולה להכתב כוקטור סיביות b1 b2 . . . bn כאשר:

$b_i = 1$ אם $a_i \in A$

$b_i = 0$ אם $a_i \notin A$.

כך לדוגמא, אם $S = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$, וקטור הסיביות 0110 מייצג את תת-הקבוצה $\{ a_2, a_3 \}$.

תרגילים

1. אלו תת-קבוצות של $\{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$ מיוצגות ע"י וקטורי הסיביות הבאים:
   (א) 0000 (ב) 1001 (ג) 1111
2. כתוב תוכנית של n-לולאות לרישום כל וקטורי הסיביות של הקבוצה $S = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$.
3. באיזה אופן ניתן להשתמש בוקטורי סיביות כדי לייצג קבוצות ע"ג מחשב?

פעולות על קבוצות, ודיאגרמות ון

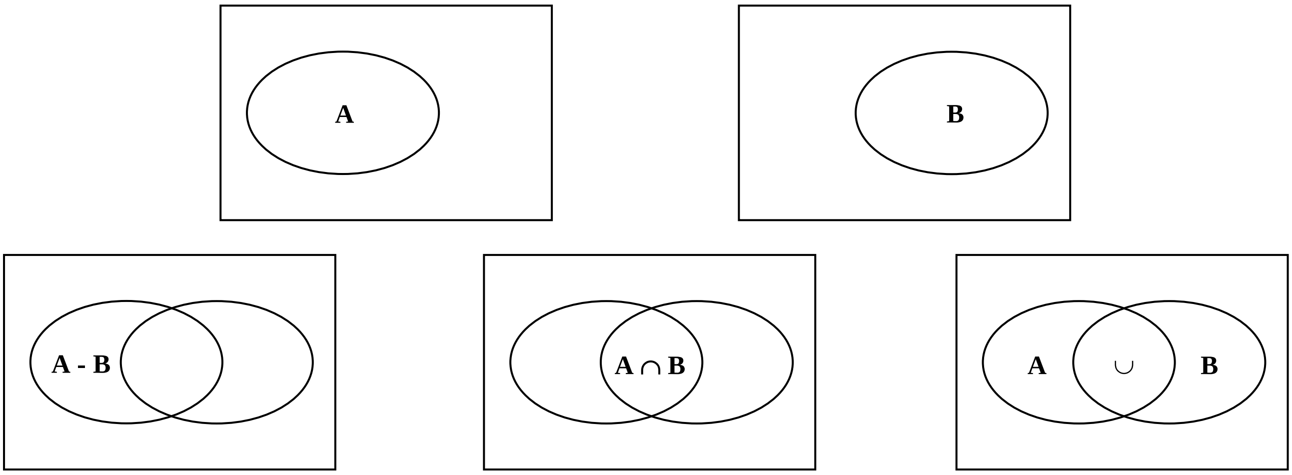
איחוד: $A \cup B = \{ x \in \hat{U}:\ x \in A$ או $x \in B \}$

חיתוך: $A \cap B = \{ x \in \hat{U}:\ x \in A$ וגם $x \in B \}$

חיסור: $A - B = \{ x \in \hat{U}:\ x \in A$ וגם $x \notin B \}$

משלים: $\overline{A} = \{ x \in \hat{U}:\ x \notin A \}$

להלן דיאגרמות ון של איחוד, חיתוך חיסור ולא נשתמש בהם בהמשך כי הגישה שלנו פורמלי יותר.



תכונות של קבוצות

(א) $\emptyset \subseteq A$

(ב) $A \subseteq \hat{U}$

(ג) $A \cap \hat{U} = A$

(ד) $A \cup \emptyset = A$

(ה) $A \cup \hat{U} = \hat{U}$

(ו) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(ז) $A \cap B = B \cap A$

(ח) $A \cup B = B \cup A$

(ט) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(י) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(יא) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(יב) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(יג) $A \subseteq A \cup B$

(יד) $A \cap B \subseteq A$

(טו) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(טז) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

הערות: (ז), (ח) - חוקי החילוף. (ט), (י) - חוקי הקיבוץ.
(יא), (יב) - חוקי דה-מורגן. (טו), (טז) - חוקי הפילוג.

עקרונות להוכחת תכונות של קבוצות

1. כדי להוכיח ש- $A=B$, הוכח כי: $x \in A$ אם ורק אם $x \in B$.
2. כדי להוכיח ש- $A \subseteq B$, הוכח כי: אם $x \in A$, אזי $x \in B$.

הבה נוכיח כמה מהתכונות הקודמות תוך שימוש בכללים אלה:

הוכחה של (יב)

$x \in \overline{A \cap B}$

אם ורק אם $\text{not} (x \in A \cap B)$

אם ורק אם $\text{not} (x \in A \text{ and } x \in B)$

אם ורק אם $x \notin A$ או ש- $x \notin B$
אם ורק אם $x \in \overline{A}$ או ש- $x \in \overline{B}$
אם ורק אם $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
וכך $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

הוכחה של (יד)

אם $x \in A \cap B$
אזי $x \in A$ ו- $x \in B$
אזי $x \in A$
וכך $A \cap B \subseteq A$

הוכחה של (טו)

$x \in A \cap (B \cup C)$
אם ורק אם $x \in A$ ו- $x \in (B \cup C)$
אם ורק אם $x \in A$ ו- ($x \in B$ או $x \in C$)
אם ורק אם ($x \in A$ ו- $x \in B$) או ($x \in A$ ו- $x \in C$)
אם ורק אם $x \in A \cap B$ או $x \in A \cap C$
אם ורק אם $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
וכך $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

תרגילים: הוכח שאר התכונות של קבוצות.

הכללת איחוד וחיתוך

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\in Û: x\in A_I \text{ for SOME } i\in I\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in Û: x\in A_I \text{ for ALL } i\in I\}$$

חוקי דה-מורגן כלליים

1. $$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

2. $$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

הוכחה של 1

$x\in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$

IFF $x\notin \bigcup_{i\in I} A_i$

IFF $x\notin A_i$ for all $i \notin I$

IFF $x\in \overline{A_i}$ for all $i \in I$

IFF $x\in \bigcap_{i\in I} A_i$

דוגמאות

כאשר $I=\{1,3,5\ldots\}$

$\bigcup_{i\in I} A_i = A_1\cup A_3\cup A_5 \ldots$

כאשר $I=\{2,4,6,8\ldots\}$

$\bigcap_{i\in I} A_i = A_2\cap A_4\cap A_6\cap A_8\ldots$

כאשר $I=\{1,2,3,4\ldots\}$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 ...$$

כדי להוכיח את 2 צריך להחליף כל איחוד לחיתוך וכל all ל some.

מכפלה קרטזית

הגדרה: $A \times B = \{(x,y) : x \in A \text{ and } y \in B\}$

דוגמה: כאשר $A=\{a,b\}, B=\{1,2,3\}$, $A \times B = \{(a,1)\ (a,2)\ (a,3)\ (b,1)\ (b,2)\ (b,3)\}$

כאשר A,B הן קבוצות סופיות, $|A\times B| = |A| \times |B|$. כלומר, מספר האברים במכפלה שווה למכפלת מספר האברים.

תכונות של מכפלה קרטזית:

$A \times (B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

$A \times (B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

הוכחה לתכונה הראשונה:

$(x,y)\in A \times (B\cap C)$ IFF $(x\in A)$ AND $(y\in B\cap C)$

IFF $(x\in A)$ AND $(y\in B)$ AND $(y\in C)$

IFF $((x\in A)$ AND $(y\in B))$ AND $((x\in A)$ AND $(y\in C))$

IFF $((x,y)\in A \times B))$ AND $((x,y)\in A \times C))$

IFF $(x,y)\in(A \times B) \cap(A \times C)$

מ.ש.ל.

תרגיל: הוכח את התכונה השנייה.

הגדרת יחס

נניח ש A,B הם שני קבוצות. ליחס R בין האיברים של A,B יש מבנה של קבוצת זוגות, כלומר $R\subseteq A\times B$.

אנו נכתוב aRb כאשר $(a,b)\in R$ ונאמר שהיחס R קיים בין a לבין b. כמובן $a\in A, b\in B$.

הערות

1. aRb או $(a,b)\in R$ הם שני ביטויים לאותו דבר, כלומר שהיחס קיים בין a לבין b.
2. $R=\{(a,b)\in A\times B : aRb\}$
3. אם יש שני יחסים $S\subseteq B\times C,\ R\subseteq A\times B$; נרשום בקיצור aRbSc, במקום aRb AND bSc.
   לדוגמה $(a>b\geq c) \equiv (a>b) \text{ and } (b\geq c)$
4. פעולות ותכונות של קבוצות, תקפות גם על יחסים, אבל בהגדרה $\bar{R} = \hat{U} - R$,
   במקום $\hat{U}$, נשים $A\times B$. כלומר $\bar{R} = (A\times B) - R$.

דוגמאות

א. אנשים: {אברהם, דוד, מרים , יהודה}=A, מספרי חשבונות: $B=\{1010, 1023, 3201, 9431\}$,
R={(1010 יהודה) (1023 מרים) (1010 דוד) (1023 דוד) (3201דוד)}. דוד כביכול מנהל הבנק והוא רשאי להשתמש בכל ואילו אברהם לא רשאי להשתמש בכלום.

ב. נניח ש- N היא קבוצת השלמים שאינם שליליים: $N=\{0,1,2\ldots\}$. היחס $< = \{ (x,y) : x<y \}$

$$= \{ \begin{array}{l} (0,1), (0,2), (0,3)\ldots \\ (1,2), (1,3), (1,4)\ldots \\ (2,3), (2,4), (2,5)\ldots \\ \ldots \} \end{array}$$

שים לב: $[(x,y)\in <] \equiv [x<y]$

אפשר להגדיר את היחס > ע"י הגדרה אינודקדיבית:

1. $(0,1)\in<$
2. (i) אם $(x,y)\in<$, אזי $(x,y+1)\in<$.
   (ii) אם $(x,y)\in<$, אזי $(x+1,y+1)\in<$.

ג. נניח ש R_1, R_2 הם יחסים. התבונן ביחס איחוד $(R_1 \cup R_2)$. מתי האיחוד מתקיים כיחס?

$$\begin{array}{llll} x\,(R_1 \cup R_2)\,y & \text{IFF} & (x, y) \in R_1 \cup R_2 & \\ \text{IFF} & [\,(x, y) \in R_1 & \text{OR} & (x, y) \in R_2\,] \\ \text{IFF} & [\,(x\, R_1\, y) & \text{OR} & (x\, R_2\, y)\,] \end{array}$$

הרכבה, היפוך וסגירה עוברת של יחסים

הרכבה (Composition)

נניח ש- $R\subseteq A\times B$, ו- $S\subseteq B\times C$ (R ו- S הם קבוצות של זוגות בעלי יחס מסוים), אזי ההרכבה שלהם מסומנות כך: $R\circ S$, ומוגדרת כך: $R\circ S = \{(a,c) \in A\times C: aRbSc \text{ for some } b\in B\}$, כלומר $(R\circ S)\subseteq A\times C$.
ע"פ הגדרה זו

$a(R\circ S)c$ IFF $aRbSc$ for some $b\in B$
IFF aRb and bSc for some $b\in B$

דוגמה: אם aRb מסמן ש-a הינו אח או אחות של b,
ו bSc מסמן ש-b הינו אב או אם של c,
אזי $a(R\circ S)c$ מסמן ש-a הוא דוד או דודה של c.

יחס הפוך (Converse)

נניח ש-R הוא יחס $R\subseteq AxB$.
היחס ההפוך הוא $R^{-1}\subseteq BxA$, ומוגדר כך: $R^{-1}=\{(b,a) \in BxA : aRb\}$
כלומר, $aR^{-1}b$ IFF bRa

דוגמאות:
1. $b<^{-1}a$ IFF $a<b$ IFF $b>a$, כלומר $<^{-1}=>$.
2. נניח ש S הוא יחס של אב או אם, אזי S^{-1} הוא יחס של בן או בת: $xS^{-1}y$ IFF ySx. כלומר, x בן או בת של y אם ורק אם y אב או אם של x.
3. נניח ש R הוא יחס של אח או אחות, S יחס של אב או אם. אזי $x(S^{-1}\circ R\circ S)y$ פרושו ש x, y הם בני דודים. מתקיים $xS^{-1}bRaSy$, כלומר x בן של b, b אח של a, וa הורה של y.

סגירה עוברת (Transitive Closure)

נניח ש $R\subseteq AxA$. הסגירה העוברת R^+ מקיימת גם היא $R^+\subseteq AxA$, ומוגדרת כך:

$$R^+ = \{(a,b) \subseteq AxA: \text{for some } Z_1, Z_2\ldots Z_n,\ n\geq 0,\ aRz_1Rz_2\ldots Rz_nRb\}$$

כלומר, aR^+b IFF $aRz_1Rz_2\ldots Rz_nRb$, for some $Z_1, Z_2\ldots Z_n\in A$, $n\geq 0$
כלומר, aR^+b IFF aRb OR $a(R\circ R)b$ OR $a(R\circ R\circ R)b \ldots$
כלומר, $R^+=R\cup(R\circ R)\cup(R\circ R\circ R)\ldots$

דוגמאות

1. S יחס של הורה. את היחס "צאצא" נבטא ע"י $x(S^{-1})^+y$ או $x(S^+)^{-1}y$. כמובן xS^+y מסמן ש- x הוא "אב קדמון" של y.
2. נניח שZ קבוצת כל השלמים, ו$S\subseteq ZxZ$ מוגדר כך: xSy IFF $y=x+1$. אזי xS^+y מסמן ש $x<y$. כלומר, $(S^+)=(<)$.

דוגמאות שקילות והכלה ביחסים

$(\geq)\equiv(\overline{<})$, כלומר not $(x<y)$ IFF $(x\geq y)$
$(\geq\cap\leq)\equiv(=)$, כלומר $(x=y)$ IFF $(x\geq y$ and $x\leq y)$
$(<\cap=)\equiv(\leq)$, כלומר $(x\leq y)$ IFF $(x<y$ or $x=y)$
$(\leq)\subseteq(=)$, כלומר אם $x=y$, אזי $x\leq y$.

בס"ד

תכונות של יחסים

1. $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$
2. $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$
3. $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$
4. $(R^{-1})^{+}=(R^{+})^{-1}$
5. $(R\cap S)^{+}\subseteq R^{+}\cap S^{+}$
6. $R^{+}\cup S^{+}\subseteq (R\cup S)^{+}$
7. $R\circ (S^{1}\cup S^{2})= (R\circ S^{1})\cup (R\circ S^{2})$
8. $R\circ (S^{1}\cap S^{2})= (R\circ S^{1})\cap (R\circ S^{2})$

עקרונות להוכחת תכונות של יחסים

1. ע״מ להוכיח $R=S$ צ״ל ש- $(x,y)\in R$ IFF $(x,y)\in S$, כלומר xRy IFF xSy.
2. ע״מ להוכיח $R\subseteq S$ צ״ל שאם $(x,y)\in R$, אזי $(x,y)\in S$, כלומר אם xRy אזי xSy.

דוגמת הוכחה

1. $x\,(R\circ S)^{-1}\,y$ IFF $y\,(R\circ S)\,x$ IFF $yRbSx$ for some b
IFF yRb and bSx for some b
IFF $xS^{-1}b$ and $bR^{-1}y$ for some b
IFF $xS^{-1}bR^{-1}y$ for some b
IFF $x\,(S^{-1}\circ R^{-1})\,y$
ולכן $(R\circ S)^{-1}= S^{-1}\circ R^{-1}$

תרגילים: הוכח שאר התכונות של יחסיםץ

משפחות של יחסים

1. יחסי זהות
2. פונקציות
3. סדרים
4. יחסים מבוססים היטב

יחסי זהות

נניח ש $E\subseteq A\times A$ הינו יחס. אזי E נקרא יחס זהות במידה שהוא מקיים את התנאים הבאים:

א. aEa קיים עבור כל $a\in A$

ב. אם aEb אזי bEa

ג. אם aEbEc אזי aEc

ובצורה אחרת:

א. $(=)\subseteq E$

ב. $E\subseteq E^{-1}$

ג. $(E\circ E)\subseteq E$

דוגמאות

1. '=' הינו יחס זהות.
2. '≤' אינו יחס זהות, כי אינו מקיים את התנאי השני.
3. נניח ש: Z הוא קבוצת כל השלמים, $x,y\in Z$ והיחס $E\subseteq Z\times Z$ מוגדר כך: xEy IFF $(x-y)=12k\ (k\in Z)$.
היחס E הוא יחס זהות. נבדוק את התנאים: aEa מתקיים כי $(a-a)=0=12*0$. אם aEb, $(a-b)=12k$ ואז $(b-a)=-12K$, כלומר bEa. אם aEbEc, $(a-b)=12k_1$ ו- $(b-c)=12k_2$, ואז $(a-c)=(a-b)+(b-c)=12(k_1+k_2)$, כלומר aEc.

מחלקות זהות

נניח ש-E יחס זהות $E\subseteq AxA$, $a\in A$. המחלקה של a לפי היחס E מסומנת ע״י $[a]_E$ (או [a]), ומוגדרת כך:

$[a]=\{x \mid aEx\}$

דוגמא (המשך מדג' 3 לעיל)

$[0] = \{x: 0\text{-}x=12k\} = \{ \dots -24, -12, 0, 12, 24 \dots\}$
$[1] = \{\dots -23, -11, 1, 13, 25\dots\}$

שים לב:

$[0] = [-24] = [-12] \dots$
$[0] \cap [1] = \varnothing,\ [2] \cap [13] = \varnothing$

רואים מדוגמה זו, שאיברים זהים לפי היחס, בעלי אותה מחלקה. לעומת זאת, איברים שאינם זהים לפי היחס, החיתוך בין מחלקותיהם הנו קבוצה ריקה.

משפט

ביחס זהות $E \subseteq AxA$, $a,b\in A$ אזי $[a] = [b]$ **או** $[a] \cap [b] = \varnothing$.

הוכחה

אם $[a] \cap [b] = \varnothing$, זה מקיים את תנאי המשפט. נשאר להוכיח, שעבור $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, $[a] = [b]$.
לכן נניח ש- $c \in [a] \cap [b]$. לכן $c \in [a]$ וגם $c \in [b]$. מכאן מתקיים aEc ו- bEc. לכן מתקיים גם aEb וגם bEa.
לכן לכל $x \in [a]$ (כלומר aEx) מתקיים גם bEx ולכן $x \in [b]$ וכמו כן ההיפך. ולכן, $[a] = [b]$.

חלוקה של קבוצות

מהמשפט הקודם רואים שיחס זהות מחלק קבוצה למחלקות זרות. גם ההפך נכון:

משפט

נניח ש A קבוצה, $S_1, S_2\dots S_n$ תת-קבוצות זרות של A שאינן ריקות. כלומר: $A = S_1\cup S_2\cup\dots\cup S_n$, $S_i\neq\varnothing$ ו- $S_i\cap S_j=\varnothing$ עבור $i\neq j$. אם נגדיר aEb כאשר a,b הם באותה תת-קבוצה S_i, אזי E הוא יחס זהות.

הוכחה

1. $A = S_1\cup S_2\cup\dots\cup S_n$ ולכן לכל $a \in A$, a שייך לאחת הקבוצות S_i. a ו- a נמצאים באותה קבוצה ולכן מתקיים aEa.
2. אם aEb אזי $a,b \in S_i$ ולכן מתקיים גם bEa.
3. אם $aEbEc$ אזי $a,b \in S_i$ ו- $b,c \in S_j$ אך כיוון שהמחלקות זרות, b נמצאת רק בקבוצה אחת ולכן $i=j$. מכאן ש $a,b,c \in S_i$ ולכן מתקיים aEc.

תרגילים

1. נניח ש- aEb מתקיים כאשר ל- a,b יש אותו אבא. א) הראה ש- E הינו יחס זהות. ב) מה הן המחלקות הזהות?
2. נניח ש- $R \subseteq A \times A$ הינו יחס. נניח ש- aRa מתקיים לכל a. הוכח ש- $E=(R\cup R^{-1})^+$ הינו יחס זהות.
3. נגדיר aEb כ- $f(a)=f(b)$ (f - פונקציה). הוכח ש- E הינו יחס זהות.

פתרונות

1. א) aEa מתקיים כי ל- a יש אותו אבא כמו לעצמו. אם aEb מתקיים אזי ל- a ול- b יש אותו אבא, ולכן גם ל- b ו- a יש אותו אבא ולכן bEa מתקיים. אם aEb מתקיים אזי ל- a ול- b אותו אבא, אם bEc מתקיים אזי ל- b ול- c יש אותו אבא. ופני אין לאדם שני שבות, לכן ל- a ול- c יש אותו אבא, ו- aEc מתקיים.
ב) כל האחים ממשפחה אחת הם מחלקה זהות.

2. נגדיר $S=(R\cup R^{-1})$, כלומר $E=S^+$.
i) התנאי הראשון מתקיים כי aRa תמיד מתקיים, לכן aSa מתקיים וגם aS^+a.
ii) אם aEb אזי aS^+b. אבל $S=S^{-1}$ כי:

$$xSy \ \text{IFF}\ x(R\cup R^{-1})y \ \text{IFF}\ xRy \text{ OR } xR^{-1}y \ \text{IFF}\ xRy \text{ OR } yRx \ \text{IFF}\ yR^{-1}x \text{ OR } yRx \ \text{IFF}\ yRx \text{ OR } yR^{-1}x \ \text{IFF}\ y(R\cup R^{-1})x.$$

לכן אם aS^+b אזי $a(S^{-1})^+b$ ולכן $a(S^+)^{-1}b$ ולכן bS^+a כלומר, bEa והתנאי השני מתקיים
iii) אפשר לראות שהתנאי השלישי מתקיים, לפי ההגדרה של $^+$. אם $aEbEc$ אזי aS^+bS^+c, ולכן $aSx_1Sx_2\dots bSy_1Sy_2\dots c$ מתקיים, כלומר aS^+c ו- aEc.

3. aEa מתקיים כי $f(a)=f(a)$. אם aEb מתקיים, $f(a)=f(b)$ ולכן גם $f(b)=f(a)$ ו- bEa מתקיים. אם $aEbEc$ מתקיים, $f(a)=f(b)$ ו- $f(b)=f(c)$ ולכן גם $f(a)=f(c)$ ו- aEc מתקיים.

פונקציות

פונקציה $f\subseteq A\times B$ הינו יחס עם תכונה נוספת, שלכל $x\in A$ יש בדיוק y אחד $y\in B$, כך ש xfy .
נסמן פונקציה ע״י $f : A\rightarrow B$ ונסמן ע״י $f(x)$ את ה y היחיד המקיים xfy. ערך הפונקציה עבור x הנו $y=f(x)$.

סימונים שקולים לפונקציה

1. xfy
2. $(x,y)\in f$
3. $f(x)=y$

1. חיתוך פונקציות

אם $f : A_1\rightarrow B_1$, $f : A_2\rightarrow B_2$ אזי $f_1\cap f_2 : A\rightarrow B_1\cap B_2$ פונקציה כאשר $A=\{x\in A_1\cap A_2 : f_1(x)=f_2(x)\}$.
כלומר ניקח את איבר x שבחיתוך בין A_1 ו- A_2, אך רק את אותם איברים שעבורם $f_1(x)=f_2(x)$, ע״מ שלא נקבל שני ערכים לפונקציה עבור אותו ערך x.

2. איחוד פונקציות

$f_1\cup f_2 : A_1\cup A_2\rightarrow B_1\cup B_2$ - פונקציה, בתנאי ש- $f_1(x)=f_2(x)$ עבור $x\in A_1\cap A_2$.
כלומר:

$$f_1\cup f_2(x)=f_1(x) \qquad x\in A_1$$
$$f_1\cup f_2(x)=f_2(x) \qquad x\in A_2$$

3. הרכבת פונקציות

נניח ש- $f : A\rightarrow B$, $g: B\rightarrow C$, אזי $f\circ g : A\rightarrow C$ תמיד פונקציה.

הוכחה

לפי הגדרת יחסים -

$$\begin{aligned} x(f\circ g)z \quad & \text{IFF } xfygz \\ & \text{IFF } xfy \text{ AND } ygz \\ & \text{IFF } y=f(x) \text{ AND } z=g(y) \\ & \text{IFF } z=g(f(x) \end{aligned}$$

כלומר $z= f\circ g(x)=g(f(x))$ מ.ש.ל.

4. f^{-1} לא תמיד פונקציה, f^{+} לעיתים נדירות פונקציה

5. פונקציה נקראת חד-חד ערכית, אם $f(x_1)=f(x_2)$ גורר $x_1=x_2$.

6. $f : A\rightarrow B$ היא ״פונקציית על״ אם לכל $y\in B$ יש $x\in A$ כך ש- $f(x)=y$ (לא מחייב שתהיה חד-חד ערכית)

7. אם $f : A\rightarrow B$ היא פונקציית על וגם חד-חד ערכית, אזי $f^{-1} : B\rightarrow A$ גם פונקציית על חד-חד ערכית ומתקיים $f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A;\ \ f(f^{-1}(y))=y,\ y\in B$.

פונקציות זהות

$i_A : A\rightarrow A$, $i_A(x)=x$ עבור $x\in A$

משפט

נניח ש- $f : A\rightarrow B$, $g : B\rightarrow A$ וגם $f\circ g=i_A$. כלומר, $f\circ g(x)=g(f(x))=x$. אזי f חד-חד ערכית ו- g פונקציית על.

הוכחה

1) נניח ש- $f(x_1)=f(x_2)$. אזי $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ ולכן $x_1=x_2$, ו- f חד-חד ערכית.
2) נניח $x\in A$ ונגדיר $y=f(x)$. $g(y)=g(f(x))=x$, ולכן g פונקציית על.

כאשר $f\circ g=i_A$ וגם $g\circ f=i_B$, f ו- g חד-חד ערכיות ופונקציות על, וכן $f=g^{-1}$ וגם $g=f^{-1}$.

דוגמאות

1) $A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,2,3\ldots\}$. $f : A\rightarrow B,\ f(x)=x+1$. $g : B\rightarrow A,\ g(y)=(y-1)\bmod 3$.
f חד-חד ערכית ו- g פונקציית על.

2) נניח ש- $f\subseteq A\times B$,$g\subseteq B\times A$ יחסים, ו- $f\circ g=i_A$. אין הכרח ש f או g פונקציות. למשל, אם $A=\{x_1\}$, ו- $B=\{y_1,y_2,y_3\}$. $f(x_1)=y_1,y_2$,$g(y_1)=g(y_2)=x_1$. f לא פונקצייה, כי ל- x_1 יש יותר מערך אחד, ו- g לא פונקציה כי ל- y_3 אין ערך. זאת למרות ש$f\circ g(x_1)=x_1$.

דמות ודמות הפוכה

נניח ש- $f : A\rightarrow B$ היא פונקציה. $U\subseteq A,\ V\subseteq B$.

1) הדמות של U מוגדרת ע"י $f(U)=\{f(x) : x\in U\}$, כלומר $f(x)\in f(U)$ אם ורק אם $x\in U$.

2) הדמות ההפוכה של V מוגדרת ע"י $f^{-1}(V)=\{x : f(x)\in V\}$, כלומר $x\in f^{-1}(V)$, אם ורק אם $f(x)\in V$.

הערה

אם $x\in A$, $f(x)$ מסמן את ערך הפונקציה. אם $U\subseteq A$, $f(U)$ מסמן את את הדמות של U.

תכונות של דמות ודמות הפוכה

1) $f(\emptyset)=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$

2) $f(A)\subseteq B$ וכאשר $f : A\rightarrow B$ היא פונקצית על, אז $f(A)=B$

3) $f^{-1}(B)=A$

4) $U\subseteq f^{-1}(f(U))$ ואם f חד-חד ערכית אז $U=f^{-1}(f(U))$

5) $f(f^{-1}(V))\subseteq V$ ואם $f : A\rightarrow B$ פונקציית על אז $f(f^{-1}(V))=V$

6) $U_1, U_2\in A$, $f(U_1\cup U_2)=f(U_1)\cup f(U_2)$

7) $U_1, U_2\in A$, $f(U_1\cap U_2)\subseteq f(U_1)\cap f(U_2)$ (כאשר f חד-חד ערכית, יש שיוויון)

8) $V_1, V_2\in B$, $f^{-1}(V_1\cup V_2)=f^{-1}(V_1)\cup f^{-1}(V_2)$

9) $V_1, V_2\in B$, $f^{-1}(V_1\cap V_2)=f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2)$

הוכחות

4. אם $x\in U$ אז $f(x)\in f(U)$ (לפי הגדרת דמות), ולכן $x\in f^{-1}(f(U))$ (ע"פ הגדרת דמות הפוכה כאשר $V=f(U)$), ולכן $U\subseteq f^{-1}(f(U))$.
לפונצקיה חד-חד ערכית, אין איברים שונים כך שערך הפונקציה שווה עבורם. כלומר לכל הערכים y של הפונצקיה שב- $f(U)$ יש ערך אחד x ב- U בלבד כך ש- $y=f(x)$ ושלא נמצא **גם** במקום אחר. ולכן $U=f^{-1}(f(U))$.

6. $f(x)\in f(U_1\cup U_2)$ אם ורק אם $x\in(U_1\cup U_2)$, כלומר $x\in U_1$ או $x\in U_2$. לכן $f(x)\in f(U_1)$ או $f(x)\in f(U_2)$, כלומר $f(x)\in f(U_1)\cup f(U_2)$, ו- $f(U_1\cup U_2)=f(U_1)\cup f(U_2)$.

7. אם $f(x)\in f(U_1\cap U_2)$ אז $x\in(U_1\cap U_2)$, ע"פ הגדרת דמות. כלומר, $x\in U_1$ וגם $x\in U_2$, ולכן $f(x)\in U_1$ וגם $f(x)\in U_2$, ע"פ הגדרת דמות. לכן $f(x)\in U_1\cap f(x)\in U_2$, כלומר $f(U_1\cap U_2)\subseteq f(U_1)\cap f(U_2)$.
לפונצקיה חד-חד ערכית, אין איברים שונים כך שערך הפונקציה שווה עבורם. כלומר לכל הערכים y של הפונצקיה שב- $f(U_1)\cap f(U_2)$ יש ערך אחד x שמוכרח להיות גם ב- U_1 וב- U_2, כך ש- $y=f(x)$ כלומר $x\in U_1\cap U_2$ ו- $y=f(x)\in f(U_1\cap U_2)$. ולכן יש שוויון ו- $f(U_1\cap U_2)\subseteq f(U_1)\cap f(U_2)$.

9. $x\in f^{-1}(V_1\cap V_2)$ אם ורק אם $f(x)\in(V_1\cap V_2)$, (ע"פ הגדרת דמות הפוכה) וזה מתקיים אם ורק אם $f(x)\in V_1$ וגם $f(x)\in V_2$. לכן $x\in f^{-1}(V_1)$ וגם $x\in f^{-1}(V_2)$, ע"פ הגדרת דמות הפוכה. כלומר, $x\in f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2)$, ומכאן $f^{-1}(V_1\cap V_2)=f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2)$.

תרגילים: הוכח שאר התכונות של דמות ודמות הפוכה.

סדר חלקי ומושלם (Partial and Total Order)

סדר חלקי

היחס $<$ הנו סדר חלקי על A , $<\subseteq A\times A$,
אם עבור כל $x,y,z\in A$
1) $x<x$ לא ק"מ.
2) אם $x<y<z$ אז $x<z$.

סדר מושלם

היחס $<$ הנו סדר מושלם על A, $<\subseteq A\times A$,
אם 1) הנו סדר חלקי על A.
2) עבור כל $x,y\in A$
או $x<y$ או $y<x$ או $x=y$

דוגמאות: (1) היחס $x<y$, פירושו x אב קדמון של y,
הנו סדר חלקי ולא סדר מושלם
(2) עבור המספרים הממשיים היחס $x<y$
פירושו $x>y$ הנו סדר מושלם (ואין צריך לומר סדר חלקי).

הגדרות עבור זוגות

נניח ש-$<_1\subseteq A\times A$, $<_2\subseteq B\times B$ הם יחסים. נגדיר יחסים על זוגות.

$(x,y)<_3(x',y')$ iff $(x<_1 x'$ and $y<_2 y')$

$(x,y)<_4(x',y')$ iff $[(x<_1 x')$ and $(y<_2 y'$ or $y=y')]$ or
$[(x<_1 x'$ or $x=x')$ and $(y<_2 y')]$

$(x,y)<_5(x',y')$ iff $x<_1 x'$ or $(x=x'$ and $y<_2 y')$

הערה: $<_3,<_4,<_5\subseteq(A\times B)\times(A\times B)$.

משפט

נניח ש $<_1$ הנו סדר על הקבוצה A ו- $<_2$ הנו סדר על הקבוצה B, אזי $<_3, <_4, <_5$ הם סדרים על הקבוצה $A\times B$, (כלומר הם סדרים על זוגות).

הוכחה ש $<_5$ הנו סדר

1) הייתכן ש- $(a,b)<_5(a,b)$?

אם כן אזי $$\underbrace{a<_1 a}_{\text{אי אפשר כי } <_1 \text{ הנו סדר}} \text{ or } (a=a \text{ and } \underbrace{b<_2 b}_{\text{אי אפשר כי } <_2 \text{ הנו סדר}})$$

לכן $(a,b)<_5(a,b)$ לא מתקיים כנדרש.

(2) נניח ש $(a,b)<_5(a',b')<_5(a'',b'')$

אזי:-

$$[\underbrace{(a<_1 a')}_{A} \text{ or } \underbrace{(a=a' \text{ and } b<_2 b')}_{B}] \text{ and}$$

$$[\underbrace{(a'<a'')}_{C} \text{ or } \underbrace{(a'=a'' \text{ and } b'<_2 b'')}_{D}]$$

אזי:-

$$(A \text{ and } C) \text{ or } (A \text{ and } D) \text{ or } (B \text{ and } C) \text{ or } (B \text{ and } D)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$a<_1 a'' \text{ or } a<_1 a'' \text{ or } a<_1 a'' \text{ or} (a=a'' \text{ and } b<_2 b'')$$

ז"א $a<_1 a''$ or $(a=a''$ and $b<_2 b'')$

ז"א $(a,b) <_5 (a'',b'')$

מ.ש.ל.

תרגילים 1) היחס $<_6$ מוגדר ע"י

$$(a,b) <_6 (a',b') \quad \text{iff} \quad (a <_1 a') \quad \text{or} \quad (b <_2 b')$$

כאשר $<_1$, $<_2$ הם סדרים על A ו- B בהתאמה.

הוכח ש- $<_6$ אינו סדר, כאשר A ו- B מכילים לפחות שני איברים כך ש $a_1 <_1 a_2$ ו- $b_1 <_2 b_2$.

2) הוכח שאם $x < y$ וגם $y < x$ אזי היחס $<$ אינו סדר.

שימוש של היחס $<_5$ במיון

אפשר למיין זוגות ע"י שני מיונים על הרכיב השני בעזרת $<_2$ ואחר כך על הרכיב הראשון בעזרת $<_1$. אבל יעיל יותר עם מיון אחד בעזרת היחס $<_5$.

משפט

אם $<_1$, $<_2$ הם סדרים מושלמים אזי היחס $<_5$ הנו סדר מושלם.

הוכחה: מהמשפט הקודם אנחנו יודעים ש-$<_5$ הנו סדר חלקי. נשאר להוכיח ש $<_5$ הנו מושלם.

מפני ש- $<_1$, $<_2$ הם סדרים מושלמים, אזי

$$[\, a <_1 a' \quad \text{or} \quad a = a' \quad \text{or} \quad a' <_1 a \,]$$
$$\text{and}$$
$$[\, b <_2 b' \quad \text{or} \quad b = b' \quad \text{or} \quad b' <_2 b \,]$$

ולכן $a <_1 a'$ and $[b \cdots\cdots b]$

or

$a = a'$ and $[b \cdots\cdots b]$

or

$a' <_1 a$ and $[b \cdots\cdots b]$

ולכן $(a,b) <_S (a',b')$

or

$a = a'$ and $[b <_2 b'$ or $b = b'$ or $b' <_2 b]$

or

$(a',b') <_S (a,b)$

ולכן $(a,b) <_S (a',b')$

or

$[a=a'$ and $b <_2 b']$ or $[a=a'$ and $b = b']$ or $[a=a'$ and $b' <_2 b]$

or

$(a',b') <_S (a,b)$

ולכן $(a,b) <_S (a',b')$

or

$(a,b) <_S (a',b')$ or $(a,b) = (a',b')$ or $(a',b') <_S (a,b)$

or

$(a',b') <_S (a,b)$

ולכן $(a,b) <_S (a',b')$ or $(a,b) = (a',b')$ or $(a',b') <_S (a,b)$

ולכן היחס $<_S$ הנו סדר מושלם. מ.ש.ל.

בס"ד

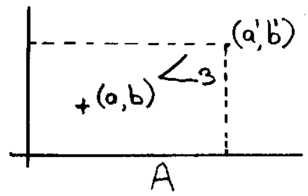
תרגילים:

1) הוכח ש- $<_3$, $<_4$ הם סדרים.

2) נניח ש- $<_1$, $<_2$ הם סדרים מושלמים על A, B בהתאם.
נניח שקיימים איברים כך ש- $a<_1a'$ ו- $b<_2b'$.
הראה שהיחסים $<_4$, $<_3$ אינם סדרים מושלמים.

3) הוכח שאם $<$ הנו סדר, אזי $<^{-1}$ גם סדר.

4) צייר ציורים להמחשת היחסים $<_3$, $<_4$, $<_5$.
לדוגמא הציור של $<_3$ הנו:



כש- (a,b) משמאל ומתחתון מ- (a',b')
אזי $(a,b)<_3(a',b')$

5) הוכח שאם xR^+x לא קיים, אזי היחס R^+ הנו סדר.

6) מדוע אי אפשר ש- $x<y<z\cdots<x$ יתקיים כאשר $<$ הנו סדר.

יחסים מבוססים היטב

נניח ש- R יחס על A, $R\subseteq A\times A$. היחס נקרא יחס מבוסס היטב בתנאי שאין סדרה אין סופית מהצורה $\ldots x_3Rx_2Rx_1$

דוגמאות

1. נגדיר את xRy כ- x+1=y. היחס מבוסס היטב כאשר (x,y) שלמים לא שליליים.כיוון שעבור n=x נקבל סדרה יורדת 0 R 1 R…n-2 R n-1 R n , כלומר הסדרה הארוכה ביותר מסתיימת ב- 0 וסופית.
2. היחס > על מספרים ממשיים אינו מבוסס היטב כי יש סדרה אינסופית כמו 0.001<0.01<0.1<1...
3. היחס > כסדר א"ב אינו מבוסס היטב כאשר אין הגבלה על אורך המחרוזת כי AAAB<AAB<AB<B…
4. כל סדר על קבוצה סופית הינו מבוסס היטב.

משפט

נניח שהיחס R מבוסס היטב. הוכח ש- :

א. R^+ מבוסס היטב

ב. R^+ סדר.

הוכחה

א. הוכחה בדרך השלילה: אם R^+ אינו מבוסס היטב, יש סדרה אינסופית $\ldots R^+x_2R^+x_1$, כלומר יש סדרה אינסופית $\ldots Rx_4R\ldots Rx_3R\ldots Rx_2R\ldots Rx_1$ וזו סתירה להנחה, ש-R מבוסס היטב.
ב. שני דברים להוכיח חלק זה.

i) xR^+x לא קיים. הוכחה בדרך השלילה. אם xR^+x קיים, אזי $xR\ldots Rx$ קיים, אזי קיים סדרה אינסופי $xR\ldots RxR\ldots RxR\ldots Rx\ldots$ וזו סתירה.

ii) אם xR^+yR^+z אזי $xR\ldots RyR\ldots Rz$ כלומר xR^+y ועל כן R^+ סדר.

אינדוקציה פשוטה על שלמים לא שליליים

1. הוכח $p(0)$.
2. הוכח שאם $p(k)$ אזי $p(k+1)$.

המסקנה: $p(n)$ נכון עבור כל שלם לא שלילי.

אינדוקציה משוכללת על שלמים לא שליליים

1. הוכח $p(0)$.
2. הניח $p(m)$ עבור m כך ש- $n>m$ והוכח $p(n)$.

(ניסוח אחר: הוכח שאם $p(0), p(1)\ldots p(n-1)$ אזי $p(n)$.)

המסקנה: $p(n)$ נכון עבור כל שלם לא שלילי.

דוגמא

נניח ש- $S_0=2$, $S_1=5$, $S_n=5S_{n-1}-6S_{n-2}$ כאשר $n>1$. נוכיח ש- $S_n=2^n+3^n$.

1. כאשר $n=0$, $2^0+3^0=2=S_0$ וזה מתאים לטענה.
2. כאשר $n=1$, $2^1+3^1=5=S_1$ וזה מתאים לטענה.
3. נטפל עכשיו במקרה $n>1$.

מפני ש- $n>n-1$, אז נניח ש- $S_{n-1}=2^{n-1}+3^{n-1}$

מפני ש- $n>n-2$, אז נניח ש- $S_{n-2}=2^{n-2}+3^{n-2}$

ולכן: $S_n=5S_{n-1}-6S_{n-2}=5(2^{n-1}+3^{n-1})-6(2^{n-2}+3^{n-2})$

$=10*2^{n-2}-6*2^{n-2}+15*3^{n-2}-6*3^{n-2}$

$=4*2^{n-2}+9*3^{n-2}=2^2*2^{n-2}+3^2*3^{n-2}=2^n+3^n$

מ.ש.ל.

לכן הנוסחה נכונה עבור כל שלם n לא שלילי.

לדיון בכיתה

$S_0 = 1$

$S_n = S_0 + \ldots + S_{n-1}$ כאשר $n>0$,

הוכח ש- $S_n = 2^{n-1}$ כאשר $n>0$

ננסה לשכלל שיטה זו ולא עבור מספרים בלבד. קודם כל שים לב ש- 0 הוא האיבר המינימלי בתחום המספרים הלא שליליים. להלן הכללה.

איבר מינימלי - (איבר קטן ביותר)

נניח ש R הנו יחס, $R\subseteq A\times A$ ו- U תת קבוצה לא ריקה של A, כלומר $\varnothing\neq U\subseteq A$. האבר m נקרא איבר מינימלי של U ע"פ היחס R אם אין איבר $x\in U$ כך ש- xRm.

(איבר קטן ביותר לפי R והוא איבר $l\in U$ כך שעבור כל $x\in U$, $x=l$ או lRx. לא נשתמש במושג זה בהכללת אינדוקציה.)

דוגמא

לקבוצה $\{(3,4), (2,1), (1,2)\}$ יש שני איברים מינימליים לפי היחס $<_4$ והם $(1,2)$, $(2,1)$.

בקבוצה שלעיל אין איבר קטן ביותר לפי $<_4$.

אינדוקציה בעזרת יחס R

נניח ש- R יחס $R\subseteq A\times A$ ו- $m,n\in A$ ו- $p(n)$ הוא תכונה של n. אנו רוצים להוכיח ש- $p(n)$ נכון עבור כל $n\in A$.

א. נניח שהוכחנו ש- $p(m)$ נכון עבור כל m שהם איברים מינימליים של A.

ב. נניח שהוכחנו ש- $p(n)$ נכון בהנחה ש- $p(m)$ נכון עבור m כך ש- mRn.

המסקנה: עבור יחסים מסוימים R, $p(n)$ נכון עבור כל $n\in A$.

המשפט הבא מאפיין לאיזה יחסים R שיטת האינדוקציה תקפה.

משפט

הסעיפים הבאים שקולים זה לזה.

א. היחס R הינו מבוסס היטב

ב. לכל קבוצה U כך ש- $\emptyset\neq U\subseteq A$ יש לפחות איבר מינימלי אחד לפי היחס R.

ג. שיטת אינדוקציה בעזרת R תקפה.

הוכחה: את המשפט נוכיח בשלשה שלבים: א←ב, ב←ג, ג←א.

א←ב

הוכחה בדרך השלילה. נניח ש-א נכון ו-ב אינו נכון. כלומר יש קבוצה שאינה ריקה שאין לה איבר מינימלי ע"פ היחס R שהוא יחס מבוסס היטב. לכן יש $x_1\in U$ שאינו מינימלי, ולכן יש $x_2\in U$ כך ש- x_2Rx_1. גם x_2 לא מינימלי ולכן קיים $x_3\in U$ כך ש- x_3Rx_2. גם x_3 לא מינימלי, לכן אפשר להמשיך ולקבל סדרה אינסופית $\dots x_3Rx_2Rx_1$ וזה סותר את א', שהיחס R מבוסס היטב.

ב←ג

הוכחה בדרך השלילה: נניח ש-ב נכון ו-ג אינו נכון. כלומר יש תכונה p המקיימת את שני התנאים של אינדוקציה ולמרות זאת $p(n)$ לא קיימת עבור כל $n\in A$. נגדיר $U=\{x\in A : p(x)=FALSE\}$. אם ג לא נכון, $U\neq\emptyset$ ולכן יש ל- U איבר מינימלי M (ע"פ ב). M אינו איבר מינימלי של A אלא רק של U כיון שלפי התנאי הראשון של האינדוקציה, p מתקיים עבור האיבר המינימלי. לכן יש איברים $m\in A$ כך ש- mRM. כל איבר כזה מקיים $m\notin U$, כי M האיבר המינימלי של U. לכן $p(m)=TRUE$ עבור כל m כך ש- mRM. ע"פ התנאי השני של אינדוקציה, $p(M)$ נכון אך $M\in U$ ולכן $p(M)=FALSE$ וקבלנו סתירה.

ג←א

נגדיר $p(n)$ שהוא התנאי שלא קיימת סדרה אינסופית שיורדת מ- n, כלומר שלא קיימת $\dots x_3Rx_2Rx_1=n$

אם m איבר מינימלי של A אז $p(m)$ בודאי נכון. נניח ש- $p(n)$ נכון עבור mRn, ונניח שקיים x_2 כך ש- $m=x_2Rx_1=n$ ולכן מ- m אין ירידה אינסופית לפי R וגם ל- n אין ירידה אינסופית ע"פ האינדוקציה. כלומר $p(n)$ נכון בהנחה ש- $p(m)$ נכון עבור mRn ולכן לפי אינדוקציה, $p(n)$ נכון עבור כל $n\in A$ כלומר לא קיימת סדרה אינסופית והיחס מבוסס היטב.

משפט

נניח שהיחסים $<_1$, $<_2$ הם $<_1\subseteq A\times A$, $<_2\subseteq B\times B$ ושניהם מבוססים היטב. אזי גם $<_3$, $<_4$, $<_5$ מבוססים היטב.
(נמצאות ההגדרות של $<_3$, $<_4$, $<_5$ בסעיף על סדרים.)

הוכחה עבור $<_5$

נוכיח שעבור כל $\emptyset\neq U\subseteq A\times B$ יש איבר מינימלי.

נגדיר $U_1\in A=\{x\in A : (x,y)\in U\}$, $U_1\neq\emptyset$. לכן יש ל- U_1 איבר מינימלי לפי $<_1$. נסמן אותו m_1.

נגדיר $U_2\in B=\{y : (m_1,y)\in U\}$, $U_2\neq\emptyset$. לכן יש ל- U_2 איבר מינימלי לפי $<_2$. נסמן אותו m_2. הזוג (m_1,m_2) הינו מינימלי ב- U לפי $<_5$ ולכן $<_5$ מבוסס היטב.

תרגילים: הוכח ש- $<_3$, $<_4$ מבוססים היטב.
הוכחה בדרך השלילה.

דוגמא לאינדוקציה בעזרת $<_5$

נניח m,n שלמים לא שליליים.

$$f(m,n)=m!,\qquad n=0$$
$$f(m,n)=n!,\qquad m=0$$
$$f(m,n)=f(m-1,m+n)+f(m,n-1)\qquad m,n>0$$

צ"ל: $f(m,n)\geq(m+n)!$

הוכחה: היחס $<_5$ מבוסס היטב כאשר m,n שלמים לא שליליים. (כאשר $<_1=<_2=<$)

א. אם $m=0$ או $n=0$ ⇐ $f(m,n)=(m+n)!$ ⇐ $f\geq(m+n)!$, כלומר התנאי קיים כאשר $m=0$ או $n=0$.

ב. כאשר $m,n>0$ אז $m-1,n-1\geq0$, כלומר $m-1,n-1$ בתחום הגדרת הפונקציה והיחס $<_5$.

$(m-1,m+n)<_5(m,n)$ ולכן מותר להניח ע"פ אינדוקציה $f(m-1,m+n)\geq(m-1+m+n)!\geq(m+n)!$.

$(m,n-1)<_5(m,n)$ ולכן מותר להניח ע"פ אינדוקציה $f(m,n-1)\geq(m+n-1)!\geq0$.

ולכן $f(m,n)\geq f(m-1,m+n)+f(m,n-1)\geq(m+n)!+0\geq(m+n)!$, מ.ש.ל.

מה הטעות להלן?

נניח ש- m,n שלמים לא שליליים.

f(m,n)=1	m=0 OR n=0
f(m,n)=f(m-2,n)*f(m,n-2)	m,n>0

צ״ל: f(m,n)=1 בכל מקרה.

א. כאשר m=0 או n=0 f(m,n)=1.

ב. כאשר m,n>0 $(m,n-2)<_4(m,n)$ וגם $(m-2,n)<_4(m,n)$

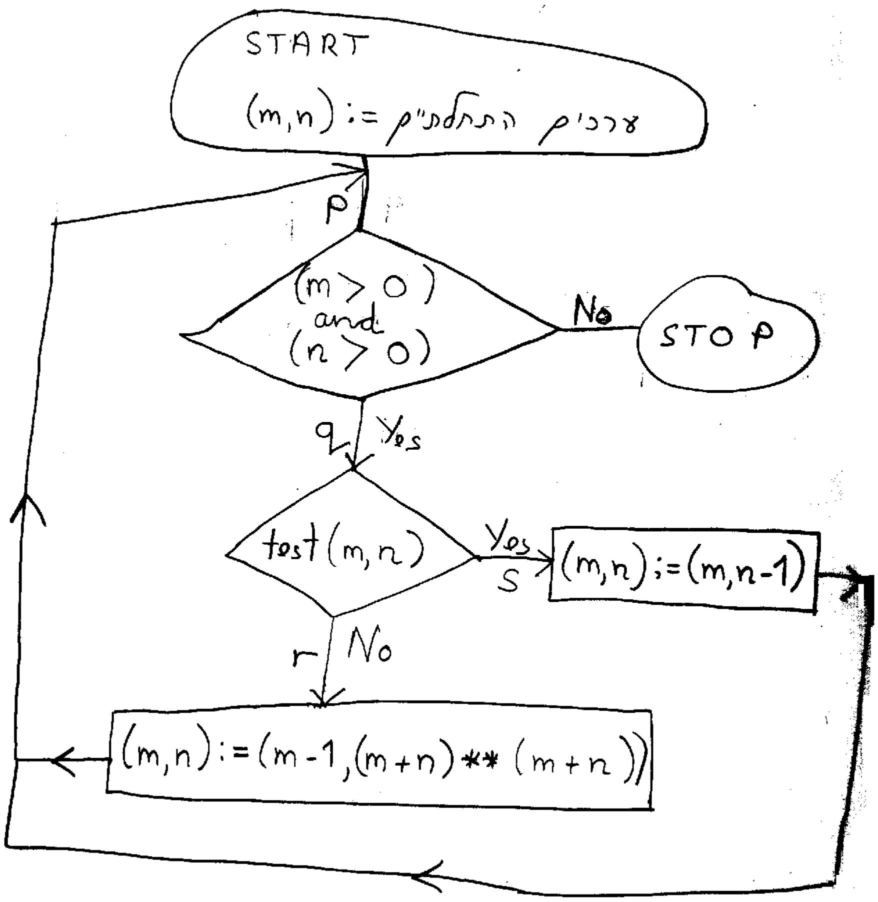
לכן מותר להניח f(m-2,n)=f(m,n-2)=1

ולכן f(m,n)=f(m-2,n)*f(m,n-2)=1*1=1

<u>הטעות היא</u> שהערכים n-2 ו- m-2 יכולים להיות קטנים מ-0 וזה חוץ מתחום הגדרת הפונקציה, וגם $<_5$ לא מבוסס היטב בתחום מספרים שליליים.

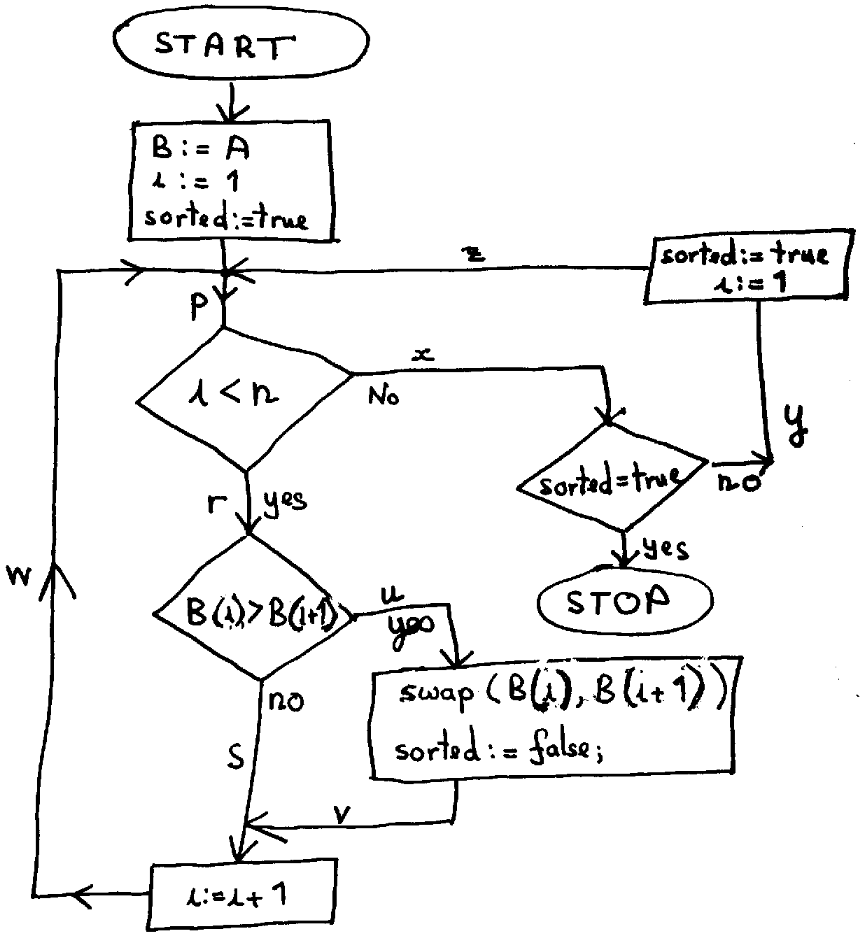
<u>לדיון בכיתה:</u>

נניח ש m,n הם מספרים טבעיים. נניח ש- test(m,n) היא פונקציה בוליאנית שתמיד מחזירה ערך. (כלומר אין לולאה אין סופית בביצוע של test(m,n)). כיצד נשתמש ביחס מבוסס היטב כדי להוכיח שאין לולאה אין סופית בתרשים הבא? איזה מהיחסים $<_3$, $<_4$, $<_5$ יעזור לנו להוכיח שאין לולאה אין סופית?



<u>Bubblesort</u> - Proof of termination using wellfounded relations.

Specification - A, B are vectors of n elements.
On completion B is like A but sorted.



There are three loops in the flowchart: pxyz, prsw and pruvw. We shall define a well founded relation on triples (B, sorted, i) and show that in each of these loops, the triple is reduced in this relation. As reduction cannot be infinite because of well foundedness, termination is assured.

The well founded relations on triples is defined by defining a well founded relation on each component of the triple and then combine them using alphabetic priority.

$B=(b_1, \dots b_n) <_1 (b_1', \dots b_n') = B'$ iff $(b_1, \dots, b_n)$ is a permutation of $(b_1', \dots, b_n')$, and for some k $b_k < b_k'$ and $b_i = b_i'$ for $i < k$. Incidentally this ordering is similar to alphabetic ordering on n-letter words but we have the added conditions that the words are permutations (anagrams) of each other. The ordering $<_1$ is well founded because the number of vectors preceding a given vector is finite as the number of permutations of a given vector is finite.

The ordering on booleans we use is sorted $<_2$ sorted$'$ iff sorted = true and sorted$'$ = false.

The relation on the index i is defined by

$i <_3 i'$ iff $i = i'+1$ and $i' < n$. This relation is also well founded.

Finally we define $(B, sorted, i) \circledless (B', sorted', i')$ iff $B <_1 B'$ or $(B = B'$ and $sorted <_2 sorted')$ or $(B = B'$ and $sorted = sorted'$ and $i <_3 i')$

The relation $\circledless$ is well founded as it is composed by alphabetic priority from three well founded relations. We now show that in each loop the triple $(B, sorted, i)$ is reduced.

Loop pxyz: If this loop is executed once then sorted = false and the triple initially is $(B, false, i)$ and on return to p the triple is $(B, true, 1)$. Clearly $(B, true, 1) \circledless (B, false, i)$ i.e. reduction.

Loop prsw: The triple must be $(B, sorted, i)$ where $i < n$ and on return to p this becomes $(B, sorted, i+1)$. But $(B, sorted, i+1) < (B, sorted, i)$ when $i < n$ so again we have a reduction.

Loop pruvw: The triple $(B, sorted, i)$ becomes $(B', false, i+1)$ where B' is like B except that the i'th and $(i+1)$'th elements have been swapped and also $i < n$, and $B[i] > B[i+1]$. Clearly therefore $B' <_1 B$. i.e. $(B', false, i+1) \circledless (B, sorted, i)$ and again the triple has been reduced in the loop.

Hence as in all loops the triple $(B, sorted, i)$ is reduced with respect to the well founded relation $\circledless$, infinite looping is impossible, that is the program terminates.